



**CENTRO OSSERVAZIONE E DIVULGAZIONE
ASTRONOMICA SIRACUSA**

**Geometrie non euclidee e
modelli cosmologici di Friedmann**

Dott. Emerico Amari

**Il contenuto è tratto dal corso
“Relatività Generale e Cosmologia”.
Luglio 2008**

INDICE DELL'ARTICOLO

1. INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA	PAG 2
- Periodo pre-euclideo	
- Periodo euclideo	
2. LA GEOMETRIA EUCLIDEA	3
- Assiomi di Euclide	
- Assiomi di Hilbert	
- Postulati della geometria elementare	
- Proprietà sulle rette parallele (Teorema fondamentale)	
3. LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA	6
1) Geometria ellittica o di Riemann	
2) Geometria parabolica o euclidea	
3) Geometria iperbolica o di Lobacevskij	
4. MODELLI DI UNIVERSO DI FRIEDMANN	8
1) Universo ciclico (Robertson e Walker)	
2) Einstein – de Sitter	
3) Espansione continua	
5. OSSERVAZIONI E CONCLUSIONI	10
6. BIBLIOGRAFIA	11

1. INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA

La parola geometria deriva dal greco e significa misurazione della terra (da ghe = terra e metron = misura). Il senso etimologico della parola geometria è da ricercarsi nell'origine stessa di questa scienza che nacque, appunto dall'esigenza di popoli antichi, Assiri, Babilonesi e Caldei, di stabilire rudimentali regole che fornissero la misura dell'estensione delle loro terre. Storicamente le prime conoscenze geometriche sono riportate da Erodoto (V a.C.) e Proclo (IV a.C.). Quest'ultimo è considerato il più autorevole storico delle scienze matematiche.

Il più grande studioso di geometria è Euclide che visse intorno al 300 a.C. e fondò una scuola matematica ad Alessandria d'Egitto: la **Scuola Alessandrina**. Infatti secondo gli studiosi la storia della geometria si può distinguere in due periodi: pre-euclideo ed euclideo.

Il primo periodo va dal VI al III secolo a. C. ed è caratterizzato da un periodo di transizione in cui i Greci maturano le nozioni empiriche e sperimentali apprese dagli egiziani, attraverso un travaglio di ricerca spesso disordinato e frammentario. Secondo gli storici fu Talete ad iniziare questo periodo. Egli passò la parte della sua giovinezza in Egitto dove si era recato per motivi commerciali e qui assimilò nozioni di geometria e astronomia. Tornato in patria divenne capo della **Scuola Jonica**. Inoltre fra i molti matematici del periodo pre-euclideo quello di maggior rilievo fu Pitagora, che in età avanzata fondò a Crotona la **Scuola Italica**.

Nel periodo euclideo la geometria cessa di essere un semplice episodio della ricerca filosofica e diviene parte integrante di un pensiero scientifico che si sviluppa con chiarezza e consapevolezza nella propria validità. In questa rinnovata atmosfera di ricerche e di studi, i geometri raccolsero e vagliarono tutta l'eredità dei precedenti pensatori, coordinando e integrando le scoperte di questi. La geometria divenne indipendente dall'esperienza e fu solo creazione del pensiero umano, assumendo, così, tutta la sua potenza di generalizzazione. Fu Euclide l'iniziatore e il realizzatore di questa opera di revisione e di studio. Della sua vita poco si conosce. Euclide scrisse i famosi *Elementi*, opera grandiosa che si compone di tredici libri. In essa le conoscenze geometriche furono esposte, per la prima volta, in modo logico e organico, con una nuova coordinazione dei primi concetti geometrici. La geometria, nella trattazione di Euclide, assume il ruolo di scienza che studia lo spazio e le figure spaziali.

Il pensiero matematico moderno ha proposto impostazioni parzialmente difformi da quelle suggerite da Euclide, ma ciò non diminuisce il valore della sua opera. Sembra, anzi, incredibile che un testo scientifico sia rimasto valido per oltre duemila anni!

2. LA GEOMETRIA EUCLIDEA

Nel linguaggio scientifico moderno la geometria diviene uno strumento capace di descrivere grandezze che giochino un ruolo fondamentale nell'osservazione di fenomeni fisici. In questa pubblicazione la geometria, euclidea e non, è vista come un insieme di postulati che descrivono le proprietà dello spazio e contribuiscono attivamente allo sviluppo del dibattito cosmologico.

La geometria elementare o metrica si identifica con la geometria euclidea del piano e dello spazio. La trattazione della geometria elementare si basa, come detto, sugli *Elementi di Euclide* ed è di tipo assiomatico - deduttivo cioè introdotti gli enti primitivi punto, retta e spazio seguono i 5 assiomi che hanno i seguenti postulati (o enunciati):

1. *per due punti distinti passa una retta;*
2. *ogni segmento si può prolungare indefinitamente;*
3. *si può tracciare su un dato piano, una circonferenza di centro arbitrario e raggio arbitrario;*
4. *tutti gli angoli retti sono uguali;*
5. *per un punto non appartenente ad una retta passa una ed una sola retta parallela alla retta data. Questo postulato prende il nome di **postulato delle rette parallele** o **unicità della parallela**.*

Le proposizioni e i teoremi che costituiscono la geometria euclidea sono lo sviluppo logico di tali premesse secondo un metodo strettamente deduttivo. L'approccio moderno sulla geometria elementare è invece di tipo ipotetico - deduttivo e differisce profondamente dalla precedente visione. Tra le differenti sistemazioni della geometria elementare si segnala quella condotta dal matematico D. Hilbert, secondo il quale i postulati che caratterizzano i punti, le rette e il piano sono divisi in cinque gruppi così ordinati:

- 1) **postulati di appartenenza** (*esempio: due punti distinti individuano una retta, che ne contiene infiniti*);
- 2) **postulati di ordinamento** (*esempio: se A e C sono punti di una retta, esiste sopra essa un punto B situato fra A e C*);
- 3) **postulati di congruenza** (*esempio: due triangoli, che hanno due lati e l'angolo compreso uguali, hanno rispettivamente uguali anche gli altri due angoli*);
- 4) **postulato delle rette parallele** (*per un punto non appartenente ad una retta passa una ed una sola retta parallela alla retta data*);

5) **postulati di continuità** (esempio: dati comunque due segmenti, esiste un multiplo dell'uno che sia maggiore dell'altro: è il postulato di Archimede).

Sorge quindi il problema della compatibilità logica del sistema di postulati enunciati, che viene ricondotto da Hilbert alla costruzione di opportuni modelli della geometria elementare basati sull'algebra e l'analisi.

La geometria euclidea, del punto, del piano e dello spazio, è caratterizzata principalmente dai seguenti postulati:

1) *Dati due punti distinti A e B, esiste una ed una sola retta r che li contiene entrambi.* Ne segue che due rette distinte non possono avere più di un punto in comune;

2) *Ogni retta è un insieme ordinato di punti.* Ne segue che fra due punti A e B di una retta r sono compresi infiniti punti appartenenti alla retta;

3) *Per ogni punto P passano infinite rette.* Ne segue che un punto A appartenente ad una retta r si dice interno ad essa, un punto P non appartenente alla retta r si dice esterno alla retta r ;

4) *Tutte le rette sono uguali;*

5) Dal postulato di Euclide si ricava che due rette, r e s, del piano si dicono parallele se coincidono oppure se non hanno alcun punto in comune;

6) *Una retta r divide il piano in tre parti (o sottoinsiemi disgiunti): la retta r stessa e le due restanti zone del piano che sono situate ai due lati di r.* Ciò prende il nome di **sesto postulato di Euclide**;

7) *Due triangoli che hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso, sono uguali;*

8) *Due triangoli che hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli ad esso adiacenti, sono uguali;*

9) *In un triangolo, ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti* (Teorema dell'angolo esterno);

10) *Un triangolo isoscele ha gli angoli alla base uguali.* Ne segue che se un triangolo ha due angoli uguali ha pure uguali i lati opposti ad essi, per cui esso è isoscele;

11) *Due triangoli che hanno i tre lati rispettivamente uguali, sono uguali.*

È importante evidenziare nell'elenco precedente dei postulati le proprietà delle rette parallele, che contraddistinguono fortemente la geometria euclidea:

Teorema 1: *Due rette parallele ad una terza, sono parallele fra loro.*

Teorema 2: *Se due rette sono parallele, ogni retta incidente all'una è incidente anche all'altra.*

Criterio di parallelismo di due rette è espresso dal seguente teorema:

Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa: o due angoli alterni (interni o esterni) uguali, o due angoli corrispondenti uguali, o due angoli coniugati (interni o esterni) supplementari, allora le due rette sono parallele. Esiste inoltre un teorema inverso al precedente. Se due rette sono parallele, allora, tagliate da una trasversale, formano con essa: due angoli alterni (interni o esterni) uguali, due angoli corrispondenti uguali e due angoli coniugati (sia interni che esterni) supplementari.

Inoltre si enuncia il **Teorema Fondamentale sulle rette parallele**. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette del piano siano parallele è che, tagliate da una trasversale formino due angoli alterni (interni o esterni) uguali, due angoli corrispondenti uguali, due angoli coniugati (interni o esterni) supplementari.*

Nello spazio euclideo, relativamente ad un sistema ortogonale di coordinate cartesiane (x, y, z, O) , la distanza fra due punti A e B è data dalla seguente relazione:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

che rappresenta la metrica pitagorica o metrica euclidea.

Infine lo spazio metrico euclideo gode di molte altre proprietà, come ad esempio:

1. $d(A, B) = |A - B| \geq 0$ per qualunque coppia (A, B) appartenente allo spazio R^3 ;
2. $d(A, B) = 0$ se e solo se $A = B$;
3. $d(A, B) = d(A, B)$ valida per qualunque coppia di punti (A, B) ;
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ valida per qualunque terna (A, B, C) . Questa proprietà è nota come «*proprietà triangolare*».

3. LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA

I problemi concernenti le rette parallele furono affrontati fin dagli albori dello studio della geometria. Si occuparono di ciò, fra gli altri, Talete, Pitagora e Aristotele, ma si ignora in quale modo essi impostarono l'argomento. Secondo il pensiero della matematica precedente al XIX secolo i postulati sono proprietà che non si possono dimostrare, ma che però possono essere verificate sperimentalmente. Si osservi che solo il V postulato di Euclide sfugge a questa possibilità di verifica sperimentale perché, per poterla effettuare, dovremmo disporre per il disegno di una regione illimitata.

Agli antichi matematici ciò parve una deficienza del perfetto meccanismo della geometria. Si cercò, pertanto, per molti secoli, di eliminare questo presunto difetto della costruzione euclidea tentando di dimostrare il postulato delle rette parallele che D'Alambert definì «*croce e scandalo della geometria elementare*». Visto il fallimento di tali tentativi, alcuni dei quali ingegnosi, all'inizio del XIX secolo alcuni matematici affrontarono il problema in un modo radicalmente diverso: ammettendo ipotesi in contrasto con il postulato di Euclide non si riusciva a cadere in assurdo, come invece sperava il Saccheri¹, si rendeva opportuno partire da quelle ipotesi contrastanti per sviluppare a fondo le teorie relative e valutare le possibili conseguenze.

Il primo a sviluppare questa idea fu il giovane matematico ungherese Giovanni Bolyai (1802-1860) seguito da Gauss, Riemann e Lobacevskij. Il merito della creazione della geometria non euclidea va a Nikolaj Ivanovic Lobacevskij (1792-1865), professore e rettore dell'Università di Kazan, il quale dimostrò la non dimostrabilità del postulato delle parallele a partire dai postulati precedenti. Gauss², che studiò le opere del Lobacevskij, aveva anticipato i punti essenziali senza però pubblicarli perché temeva, come scrisse in una lettera a Bessel, «*le strida dei beoti*». Ciò volle evitare la polemica con i matematici tradizionalisti (o euclidei) e con i filosofi idealisti che, sulla traccia di Kant, affermavano il carattere, a priori, universale della geometria euclidea. Lobacevskij nella sua memoria «*Sui principi della geometria*» (1829) e nei suoi successivi lavori, fino alla pangeometria, spiega l'indipendenza logica del V postulato dai precedenti. Proprio avvalendosi di ciò Lobacevskij affronta in modo deciso la posizione filosofica degli idealisti.

¹ **Giovanni Girolamo Saccheri** (Sanremo 1667 - Milano 1733) matematico e filosofo, usando un particolare procedimento di dimostrazione per assurdo (elaborato nella *Logica Dimostrativa*, 1697) tentò di dimostrare il V postulato degli *Elementi* di Euclide. La dimostrazione condotta si rivelò errata, nel senso che essa ammette implicitamente altre preposizioni, equivalenti al V postulato di Euclide, che non è conseguenza dei precedenti. L'opera del Saccheri ha tuttavia grande importanza nella storia della matematica in quanto egli per primo concepì l'idea di vedere a quali conseguenze si sarebbe giunti negando il V postulato, e diede quindi, pur senza cercarli, i primi teoremi di geometria non euclidea.

² **Carl Friedrich Gauss** fu un genio matematico straordinario chiamato il «principe dei matematici». Circolano su di lui numerosi aneddoti. Gauss non può essere considerato, alla stessa stregua di Lobacevskij e Bolyai, il creatore delle geometrie non euclidee perché i suoi lavori risultarono incompleti. Gauss chiamava questa geometria «anti-euclidea». Il fisico Tullio Regge, nel «*L'Infinito*», afferma: «Non è escluso che tra i beoti Gauss includesse lo stesso Kant, di cui aveva poca stima».

Quindi la nascita delle geometrie non euclidee è dovuta alla non validità del postulato delle rette parallele e al fatto che tale geometria accetta postulati in contrasto con il V. La geometria non euclidea si fonda su un sistema ipotetico - deduttivo costruito in base ai postulati della geometria euclidea a esclusione del quinto.

Naturalmente non esiste un'immagine concreta della geometria non euclidea costruita con enti geometrici considerati nel senso intuitivo della parola, e anzi taluni teoremi sembrano in contrasto con l'intuizione (per esempio la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre diversa da due angoli retti e non è costante per tutti i triangoli). Ciò si osserva che non è in contraddizione, dal punto di vista logico, con i postulati. Secondo gli sviluppi operati esistono tre tipi di geometrie:

1. **GEOMETRIA ELLITTICA O DI RIEMANN**, *nella quale si postula la non esistenza di parallele. Inoltre vanno modificati alcuni degli altri postulati: in particolare, la retta, va pensata, intuitivamente come una linea chiusa.*
2. **GEOMETRIA PARABOLICA O GEOMETRIA EUCLIDEA**, *nella quale da un punto esterno ad una retta è sempre possibile condurre una ed una sola retta parallela.*
3. **GEOMETRIA IPERBOLICA O DI LOBACEVSKIJ O DI BOLYAI**, *nella quale si postula che da ogni punto escono infinite rette parallele a una retta data;*

Si osserva che come caso limite si ha la **GEOMETRIA PARABOLICA**, cioè quella euclidea. Grazie al contributo del matematico italiano Eugenio Beltrami si è in grado di costruire un modello della geometria iperbolica piana, nello spazio a tre dimensioni e precisamente sulla superficie della pseudosfera, rappresentando le rette del piano come geodetiche della stessa superficie. Nella metrica iperbolica la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di un angolo piatto. Lo spazio iperbolico si può immaginare simile ad una sella di cavallo in cui la curvatura³, indicata, d'ora in poi, con la lettera C , uguale a $1/R^2$ è di segno negativa.

La metrica che governa, invece, lo spazio ellittico afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto. Un esempio di tale metrica si ottiene considerando una superficie convessa, per esempio una superficie sferica, e definendo in essa come distanza fra due punti la lunghezza del più piccolo arco di geodetica che li unisce (nel caso della sfera si tratta di un arco di cerchio massimo). Mentre lo spazio ellittico è rappresentabile come un enorme cocomero dotato di curvatura positiva.

Infine lo spazio euclideo a tre dimensioni, visto come caso particolare della famiglia di geometrie non euclidee, è caratterizzato da curvatura nulla (piatto).

³ La curvatura è la rapidità o il modo in cui una superficie si discosta dal piano tangente a essa in un suo punto.

4. MODELLI DI UNIVERSO DI FRIEDMANN

Nel 1922 il fisico russo *Aleksander Aleksandrovich Friedmann* risolse le equazioni di *Einstein* assumendo un'ipotesi semplice: **che la materia sia distribuita in modo omogeneo (uguale densità e pressione) e isotropo (uguale in ogni direzione)**. Questa distribuzione di materia è finalmente un modello di Universo, e lo stesso *Friedmann* mostrò che lo spazio tempo ha una soluzione semplice. Lo spazio deve essere piano e infinito, oppure curvo e di dimensioni finite, simile alla superficie di una sfera.

In realtà lo spazio potrebbe anche essere iperbolico (sella di cavallo infinitamente estesa e tridimensionale). Questi tre casi: **sferico, piatto e iperbolico**, sono i soli spazi che possono essere descritti da una singola e semplice proprietà, la curvatura scalare, e sono perciò detti **spazi a massima simmetria**. Per dirla tutta sono i soli spazi omogenei e isotropi, ovunque simili a se stessi. Ad esempio la curvatura dello spazio piano è zero. Il termine piatto vuol dire che la luce si propaga in linea retta, le rette parallele si incontrano solo all'infinito (V postulato di *Euclide*), la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi, il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e il diametro è π . In definitiva è lo spazio in cui vige la geometria euclidea. Al contrario, lo spazio sferico ha curvatura costante positiva, e quello iperbolico negativa. In questi spazi le linee più brevi tra due punti non sono più linee rette, la luce non si propaga rettilinearmente, non vige il principio di *Fermat* per lo spazio ordinario euclideo.

Dalle soluzioni ottenute da *Friedmann* lo spazio è quindi descritto a ogni istante da un unico numero, la curvatura che continueremo ad indicare con la lettera *C*. Lo spazio sferico ha volume finito allora si dice chiuso, mentre lo spazio iperbolico, essendo infinito, si dice aperto. Per completezza d'informazione anche gli spazi iperbolici possono essere chiusi se si ammette una struttura toroidale (ciambella).

Questi universi generati dalle soluzioni di *Friedmann* non sono statici, quindi si osserva che la *densità di materia*, la *curvatura* e il *raggio* varino al variare del tempo. I cosmologi preferiscono indicare le dimensioni dell'universo con il termine *fattore di scala* $R(t)$. Se il fattore di scala raddoppia anche la distanza fra due oggetti celesti raddoppia. Le equazioni di *Friedmann* legano il fattore di scala $R(t)$ alla densità di materia Ω . L'equazione di *Friedmann* si riduce alla semplice equazione:

$$\text{ENERGIA } (\Omega) = \text{CURVATURA } (C)$$

La curvatura dello spazio dipende solo dalla densità di materia - energia, pertanto possiamo elencare i seguenti casi:

- 1) se la densità Ω è maggiore di quella critica, chiamata Ω_0 , allora lo spazio è sferico;
- 2) se la densità Ω è minore di quella critica, allora lo spazio è iperbolico e infinito;
- 3) se la densità Ω è uguale a quella critica lo spazio è piatto e infinito.

La teoria del big bang fu elaborata sui modelli cosmologici di A. A. Friedmann, A. Eddington, G. Gamow e G. Lemaitrè, in cui l'espansione è iniziata da una singolarità in spazio e tempo e dove si ipotizza che lo spazio sia omogeneo e isotropo.

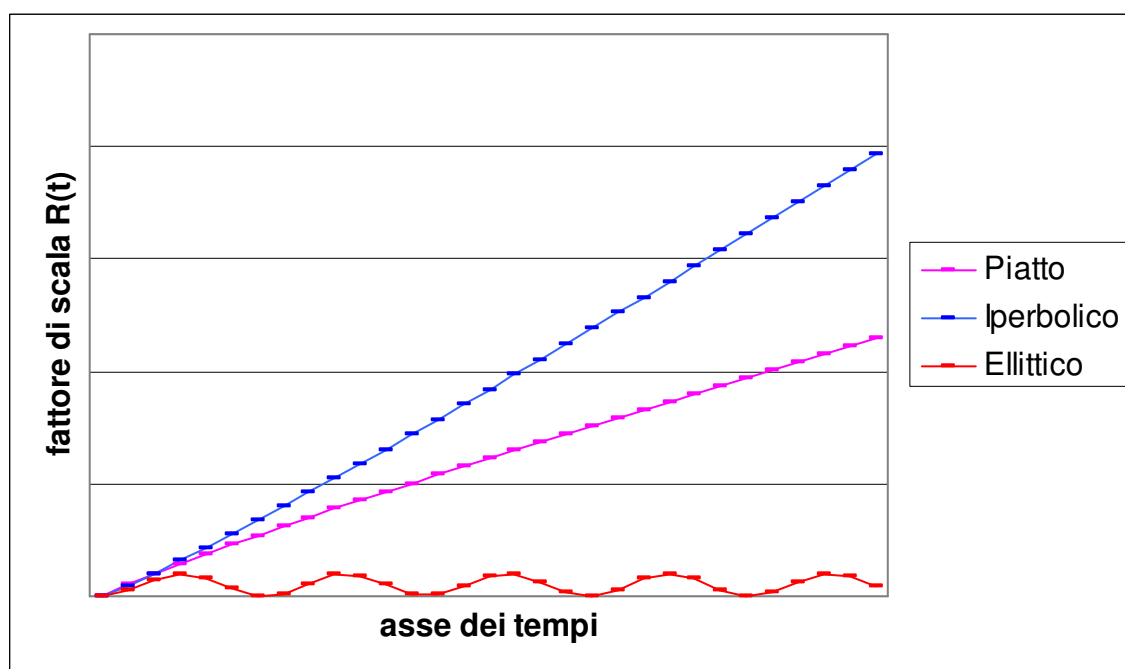
Per conoscere il modello cosmologico più attendibile è necessario stimare come varia con il tempo il fattore di scala $R(t)$ che al tempo t fissa le dimensioni dell'Universo e che nella geometria a curvatura positiva trova correlazione nel raggio di curvatura dello spazio. Le equazioni che permettono di studiare i possibili modelli cosmologici tengono conto della legge di conservazione dell'energia (1) e della legge di conservazione della materia (2):

$$\ddot{R} + \frac{4}{3}\pi \frac{G}{R^2} \rho(t_0) = 0 \quad (1) \quad \dot{R}^2 - \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho(t_0)}{R} = k \quad (2)$$

con $H = \frac{\left(\frac{dR}{dt}\right)}{R(t)}$ costante di Hubble. A seconda del segno di k avremo energia positiva,

nulla o negativa. In tabella e nella figura sottostanti sono riportati gli universi generati dalle soluzioni di A. A. Friedmann.

Modello	Geometria dello spazio	Curvatura	$\frac{\Omega}{\Omega_0}$	Destino dell'Universo
Universo ciclico (Robertson e Walker)	Sferico e finito	Positiva	> 1	Alternanza big bang big crunch
Einstein – de Sitter	Piatto e infinito	Nulla	$= 1$	Morte termica
Espansione continua	Iperbolico e infinito	Negativa	< 1	Morte termica



5. OSSERVAZIONI E CONCLUSIONI

Gli studi condotti nel XX secolo da Klein (1849-1925) e da Poincaré (1854-1912) hanno definitivamente confermato la assoluta coerenza logica delle nuove geometrie ed hanno mostrato l'indipendenza logica del V postulato dagli altri. Per cui il problema che per ben 22 secoli aveva affaticato le menti di tanti matematici era insolubile.

È chiaro che da tre postulati differenti le tre corrispondenti geometrie debbono necessariamente pervenire a risultati diversi. Nasce spontaneamente la domanda di chiedersi quale delle tre geometrie ha senso e trova applicazione nel mondo reale? Ovvero se le tre geometrie non si contraddicono a vicenda, perché studiano enti diversi, quale di esse si adatta meglio a descrivere le proprietà dello spazio in cui viviamo?

La risposta a questa domanda è estremamente complessa. Si osservi che, per stabilire di quale retta parliamo, se di Riemann o di Euclide o di Lobacevskij, è necessario precisare che cosa si intende per retta reale. La scelta più ragionevole consiste nell'assumere come rette i raggi luminosi.

Gauss, Lobacevskij e Schwarzschild pensarono di costruire un triangolo di dimensioni astronomiche in modo da misurarne la somma degli angoli interni, che come detto è diversa nelle tre geometrie. Purtroppo l'imperfezione degli strumenti a disposizione e la limitatezza dello spazio non hanno consentito di giungere ad una conclusione chiarificatrice. Si può tuttavia affermare che la geometria euclidea è la più indicata per le applicazioni pratiche, sia per la sua maggiore semplicità, sia per lo studio delle leggi fisiche (discordanze fra dati e teoria). Ciò significa che anche se lo spazio non fosse euclideo, la geometria elementare continuerebbe a descrivere con ottima approssimazione la realtà fisica.

Infine con l'introduzione della Teoria della Relatività Generale (1916) di A. Einstein, grazie al contributo determinante di matematici italiani, quali F. Severi⁴, G. Ricci-Cubastro⁵ e T. Levi-Civita⁶, allorché entrano in gioco distanze di ordine galattico, è conveniente adoperare la geometria ellittica di Riemann.

⁴ **Francesco Severi** (Arezzo 1879 - Roma 1961) professore di geometria nelle Università di Parma, Padova e Roma. Fondatore dell'Istituto Nazionale di Alta matematica, si è occupato di sistemi di equivalenze in ambito alla relatività ristretta.

⁵ **Gregorio Ricci-Cubastro** (Lugo 1853 - Bologna 1925) professore universitario a Padova, ha insegnato per 45 anni matematica e fisica. Il suo lavoro, calcolo differenziale assoluto, permise a Albert Einstein di stabilire le equazioni gravitazionali della Relatività Generale.

⁶ **Tullio Levi-Civita** (Padova 1873 - Roma 1941), allievo di Ricci-Cubastro, professore di Meccanica Razionale e Meccanica Superiore nelle Università di Pavia, Padova e Roma. Si è distinto per: 1) teorema del trasporto per parallelismo; 2) problema dei 3 corpi (prima caso piano, poi quello spaziale); 3) Tensore gravitazionale con cui stabiliva i fondamenti della statica einsteiniana; 4) rielaborando i concetti di ottica mise in evidenza un collegamento fra equazioni gravitazionali e ottica geometrica arrivando alle conclusioni di de Broglie.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Luca Amendola, “*Il Cielo Infinito*” – La Nuova cosmologia: inflazione, materia oscura, frattali (2000);
2. Fortini, Cateni “*Il Mondo Geometrico*” – Le Monnier (1987);
3. G. Dantoni, C. Mammana, “*Lezioni di Geometria*” – Di Stefano Editore;
4. C. D. Pagani, P. Salsa, “*Analisi Matematica 1*” – Vol. I – Masson Editore;
5. Tullio Regge, “*Infinito - Viaggio ai limiti dell’Universo*” Mondadori;
6. Giovanni Treccani, “*Scientifica Treccani*” Istituto della Enciclopedia Italiana;
7. Wikipedia, the free encyclopedia: “*Lobacevskij*”.

Chi è l’autore dell’articolo?

E. Amari, fisico e docente di fisica, è divulgatore CODAS. I suoi studi riguardano le stelle, le costellazioni, la storia delle supernovae e la relazione fra l’attività solare e la Terra. È autore dell’opera “*Viaggio fra le Stelle*” – Guida alle costellazioni per l’astrofilo (2004), disponibile presso la biblioteca CODAS. Nel centenario della catastrofe di Tunguska ha realizzato un ciclo di conferenze dal titolo “La Notte dei Bolidi”.